*שיעור חמישי*

**מבנים דיסקרטיים**

**המשך תמורות משיעור קודם:**

*= מספר תמורות ללא נקודות שבת בגודל .*

*= קבוצת כל התמורות,*

*= קבוצת כל התמורות שבהן האיבר במקום ה- במקום, ( היא נקודת שבת).*

*לפי עקרון הכלה והדחה:*

*קיימת הנוסחה:*

*ולכן:*

*יוצא שבערך מהתמורות הן ללא נקודות שבת, עד כמה הפתרון יהיה קרוב לפתרון האמיתי? אבל ,*

***טענה:***

*ההפרש בין המספרים ממש קטן: , קטן מחצי.*

*לכן אם , אז , מסקנה: הוא המספר השלם הכי קרוב ל- ,*

*כלומר:*

*כדי לקבל את : כאשר זוגי מחשבים ערך עליון של , כאשר אי-זוגי מחשבים ערך תחתון של .*

***הוכחת הטענה (צריך להוכיח כי ההפרש קטן מחצי):***

*סכום סדרה הנדסית:*

**נוסחאות נסיגה:**

* *פתרון נוסחאות נסיגה.*
* *פתרון בעיות קומבינטוריות בעזרת נוסחאות נסיגה.*

***מה זה נוסחאת נסיגה?***

*דרך להגדיר סדרה,* ***למשל****:*

***דוגמא נוספת, מספרי פיבונאצ'י:***

*,, , , , , , , , , ...*

**נוסחאות נסיגה הומוגוניות (כמו פיבונאצ'י):**

*תבנית:*

*– תנאי התחלה*

*למשל הנוסחה הבאה לא הומוגנית בגלל הריבוע:*

*למשל הנוסחה הבאה לא הומוגנית בגלל הכפל:*

*למשל הנוסחה הבאה לא הומוגנית בגלל שיש מספר חופשי:*

*למשל הנוסחה הבאה כן הומוגנית:*

**פתרון של נוסחת נסיגה:**

***לדוגמא על סדרת פיבונאצ'י:***

*תנאי התחלה:*

*נוסחת נסיגה:*

*,, , , , , , , , , ...*

*ראשית נמצא פולינום אופייני:*

*ניקח את נוסחת הנסיגה ההומוגנית ונעביר הכל לאגף אחד:*

*הפולינום האופייני לנוסחת נסיגה הוא:*

*שורשי פולינום:*

*צורה כללית של הפתרון:*

*צריך למצוא את הסקלרים , התאמה לתנאי ההתחלה (פעם אחת נציב כמו בתנאי ההתחלה ופעם אחת נציב ) נקבל:*

*קיבלנו מערכת משוואות לינארית, נפתור אותה עם מטריצה:*

*מסקנה:*

*במקום לחשב רקורסיבי עם נוסחת נסיגה ניתן להשתמש בנוסחה הנ"ל.*

*תרגיל – מציאת פולינום אופייני:*

*תרגיל:*

*נתון:*

*מציאת פולינום אופייני:*

*פתרונות שורשים:*

*תבנית כללית:*

*הצבת תנאי התחלה:*

*מציאת :*

*מציאת נוסחה:*

*מה עושים כאשר מופיע שורש מספר פעמים?*

*לדוגמא:*

*צורה כללית של פתרון:*

***דוגמא:***

*נתון:*

*פולינום אופייני:*

*נחשב את האיברים:*

*פתרונות לפולינום:*

**אי-יציבות, רגישות לתנאי התחלה:**

*דוגמא:*

|  |  |
| --- | --- |
| *מקרה א':* | *מקרה ב':* |
|  |  |

*במקרה ב' באגף הימני במחובר הימני ככל ש- גדל ככה הסימן "-" משתנה.*

**סדרות "קלועות":**

***למשל:***

*איך נמצא נוסחה משותפת בין שני הסדרות?*

*לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:*

*ניקח את המשוואה של , נעביר אגפים ונקבל: נעלה את כל האינדקסים ב-1 (), נקבל: , ידוע לנו את המשוואה של :*

*נפשט:*

*קיבלנו את הנוסחה:*

*אבל כדי לפתח נוסחה זאת נדרש מאיתנו לפחות 2 תנאי התחלה, ניקח שני איברים ממה שחישבנו בהתחלה*

**פתרון בעיות בעזרת נוסחאות נסיגה:**

***תרגיל:***

*כמה מילים באורך 10 יש מעל שאינן מכילות את הרצף , למשל המילה הבאה תקינה: , המילה הבאה לא תקינה: ,*

*כמה מילים באורך 10 המורכבות מ- מבלי התנאי המגביל?: .*

*נפתור בעזרת נוסחת נסיגה, נפתור בעיה יותר כללית, כמה מילים יש באורך בלי ? (בסוף רוצים את ),*

*נגדיר = מספר מילים חוקיות באורך .*

*איך נראת מילה חוקית באורך ?*

*או שהמילה מתחילה ב- ואז חייבת להיות ואחריה עוד מילה חוקית באורך 8,*

*או שהמילה מתחילה עם ואז חייבת להיות מילה חוקית באורך 9,*

*איך נראת מילה חוקית באורך ?*

*או שהמילה מתחילה ב- ואז חייבת להיות ואחריה עוד מילה חוקית באורך , ( אפשרויות "או":),*

*או שהמילה מתחילה עם ואז חייבת להיות מילה חוקית באורך , ( אפשרויות).*

*ולכן מספר אפשרויות:*

*תנאי התחלה:*

*, כיוון שאם האורך הוא "1" אז קיימים שני אפשרויות או או ומכיוון שזה או אחד אין צירוף של .*

*, מכיוון יש 4 אפשרויות אבל אחת מהם לא תקינה, האפשרויות: אבל הצירוף לא חוקי.*

*נחשב עם הנוסחת נסיגה עד שנגיע ל-:*

*(כמו סדרת פיבונאצ'י רק 2 צעדים קדימה): , ולכן:*